

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2025-2026 учебный год, 9 класс**

9.1. Петя решил выписать все простые семизначные числа, в записи которых встречаются все цифры от 1 до 7, а Вася хочет выписать все составные семизначные числа, в записи которых встречаются все цифры от 1 до 7. Вася утверждает, что у него получится в 90 раз больше чисел, чем у Пети. Прав ли Вася?

Ответ: нет, не прав

Решение:

Если составных чисел в 90 раз больше, то общее количество чисел делится нацело на 91, а значит и на 13.

$7! = 5040$ – всего семизначных чисел, составленных из цифр от 1 до 7.

5040 не делится на 13. Противоречие.

критерии	баллы
1. Полное решение.	7
2. Посчитано общее количество чисел, составленных из цифр от 1 до 5, и определено, что общее число должно делиться на 91, но не замечено противоречие.	3
3. Определено, что общее число должно делиться на 91.	2
4. Посчитано общее количество чисел, составленных из цифр от 1 до 5.	1
5. Только верный ответ.	0

9.2. Докажите, что в выражение $a^2 = 10ab + a + 20b - 25b^2$ нельзя подставить вместо чисел a и b простые числа так, чтобы получилось верное равенство.

Доказательство:

Преобразуем выражение: $a^2 - 10ab + 25b^2 = 20b + a \Rightarrow (a - 5b)^2 = 20b + a$.

Числа не могут быть одинаковыми. $16a^2 = 21a$, не может быть верным, как для нечётных простых, так и для 2.

Числа a и b одновременно нечётными быть не могут, так как получится, что левая часть – чётная, а правая – нечётная.

Чётность правой части зависит только от a , значит $a = 2$, откуда $(5b - 2)^2 = 20b + 2$.

$$25b^2 - 40b + 2 = 0$$

$$D = 1600 - 200 = 1400$$

1400 – не является точным квадратом, а значит, и уравнение не будет иметь целых корней. Делаем вывод, что b не может быть простым числом, при $a = 2$.

критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Доказано, что одно из чисел чётное, составлено и определено, что дискриминант уравнения не является точным квадратом. Окончательный вывод не сформулирован.	5
3. Определено, что одно из чисел – чётное.	2
4. Неверное решение.	0

9.3. Пусть $S(n)$ – сумма всех цифр натурального числа n . Найдите все такие n , для которых верно $n + S(n) = 2025$.

Ответ: 2016 или 1998

Решение:

Сумма цифр не более чем $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, откуда имеем 2 варианта:

$$1) \overline{19cd} = 1900 + \overline{cd} + 1 + 9 + c + d = 1910 + \overline{cd} + c + d = 2025$$

$$\overline{cd} + c + d = 115 \Rightarrow 11c + 2d = 115$$

c – нечётное и не меньше 9, иначе левая часть гарантированно меньше 115. $c = 9, d = 8$.

$$2) \overline{20cd} = 2000 + \overline{cd} + 2 + 0 + c + d = 2002 + \overline{cd} + c + d = 2025$$

$$\overline{cd} + c + d = 23 \Rightarrow 11c + 2d = 23$$

c – нечётное и не больше 2, иначе левая часть гарантированно больше 23. $c = 1, d = 6$.

критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Рассмотрены оба случая, но не объяснено, почему других нет.	6
3. Получено и обосновано одно из чисел.	3
4. Перебором получен ответ 2016, без продолжения.	2
5. Обосновано, что число не менее 1900.	1

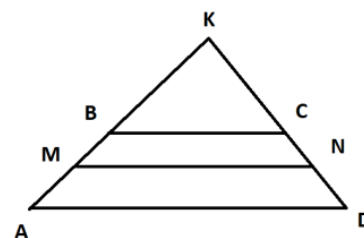
9.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$, где $a < b$, провели линию параллельную основаниям так, что площади, получившихся трапеций имеют соотношение 2: 1. Найдите длину отрезка, который отсекают боковые стороны на этой линии.

Ответ: $x = \sqrt{\frac{2b^2 + a^2}{3}}$

Решение:

Достроим трапецию до треугольника AKD , а искомый отрезок назовём MN .

Пусть x – длина отрезка MN , S – площадь трапеции $BCNM$, S_1 – площадь треугольника BKC .



$$\frac{S+S_1}{S_1} = \frac{x^2}{b^2} \text{ из подобия треугольников } MKN \text{ и } BKC.$$

$$\frac{3S+S_1}{S_1} = \frac{a^2}{b^2} \text{ из подобия треугольников } MKN \text{ и } BKC.$$

Из предыдущих утверждений следует, что $\frac{S}{S_1} = \frac{x^2}{b^2} - 1$ и $3 \cdot \frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{b^2} - 1$.

Далее получаем $\frac{3x^2}{b^2} - 3 = \frac{a^2}{b^2} - 1 \Rightarrow 3x^2 = b^2 \left(2 + \frac{a^2}{b^2} \right) = 2b^2 + a^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2b^2 + a^2}{3}}$

критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Верный алгоритм решения, с алгебраической ошибкой, при исправлении которой, решение становится полным.	5
3. Фигурирует идея о пропорциональности площадей и квадрата коэффициента подобия.	2
4. Сделаны дополнительные построения, способные привести к решению задачи, других продвижений нет.	1
5. Неверное решение.	0

9.5. Имеется набор из различных натуральных чисел. Каким должно быть минимальное количество чисел в этом наборе, чтобы его медиана отличалась от среднего арифметического на $\frac{1}{9}$?

Ответ: 9

Решение:

Оценка:

Пусть S – сумма этих чисел, n – их количество.

Медиана набора целых чисел – целое число или отличается от него на 0, 5, тогда:

$$1) \frac{S}{n} = k \pm \frac{1}{9} \Rightarrow S = kn \pm \frac{n}{9} \Rightarrow n : 9, k \in Z$$

$$2) \frac{S}{n} = k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{9} \Rightarrow S = kn + \frac{11n}{18} \text{ или } S = kn + \frac{7n}{18} \Rightarrow n : 18, k \in Z$$

Из оценки видно, что 9 будет минимальным.

$$S = 9k \pm 1, S = 18k + 7 \text{ или } S = 18k + 11$$

Пример:

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$$

$$\bar{A} = \frac{37}{9} = 4\frac{1}{9} \text{ и } A_{med} = 4$$

Примечание: примеров бесконечное множество.

критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Оценка без примера.	4
3. Верный ответ с примером.	3
4. Заявлено: «Медиана набора целых чисел – целое число или отличается от него на 0,5», без дальнейших продвижений.	1
5. Только верный ответ, без оценки и примера.	0
6. Неверное решение.	0